

Teorema dell'ordine: In $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ una curva algebrica

$C = \tilde{V}(F)$ con $\deg F = d$ interseca ogni retta r in esattamente d punti (contati con la dovuta molteplicità) a meno che non sia $r \subseteq C$.

CONSEGUENZE

- 1) Ogni curva algebrica di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ ha ∞ punti.
- 2) Se una retta interseca $C = \tilde{V}(F)$ in almeno $d+1$ punti $\rightarrow$ essa è contenuta.

DIM: Sia r una retta con $P = [(x'_1, x'_2, x'_3)]$ $Q = [(x''_1, x''_2, x''_3)]$

$P, Q \in r; P \neq Q.$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x'_1 + \beta x''_1 \\ x_2 = \alpha x'_2 + \beta x''_2 \\ x_3 = \alpha x'_3 + \beta x''_3 \end{cases}$$

$$(\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

$F(x_1, x_2, x_3)$ polinomio omogeneo che descrive
la curva.

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{0 \leq i+j \leq d} f_{ij} x_1^i x_2^j x_3^{d-i-j}$$

← monomi di grado d

$$f(x, y) = \sum_{i+j \leq d} f_{ij} x^i y^j$$

← monomi di grado $\leq d$

$$\tilde{V}(F) \cap \mathbb{A}^3 = \left\{ \begin{array}{l} F(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \\ x_3 = \dots \end{array} \right.$$

$$F(\alpha x_1' + \beta x_1'', \alpha x_2' + \beta x_2'', \alpha x_3' + \beta x_3'') =: G(\alpha, \beta)$$

Tutte le possibili soluzioni hanno la forma

(α, β) con $\alpha \neq 0$

DIVIDIAMO IL POLINOMIO $G(\alpha, \beta)$ PER α^d

$$\frac{1}{\alpha^d} G(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^d g_i \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{d-i} = H\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

poniamo $\xi = \frac{\beta}{\alpha}$ e consideriamo

$$H(\xi) = \sum_{i=0}^d g_i \xi^{d-i}$$

oss $g_0 \neq 0 \Rightarrow \deg H(\xi) = d \Rightarrow H(\xi)$ ammette in

$\mathbb{C}$ esattamente d radici

$\rightarrow$ A radici distinte di $H(\xi)$ corrispondono punti

distinti $[(1, \xi)]$ di sol. di $G(\alpha, \beta) = 0$

oss: Se $G(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^d g_i \alpha^i \beta^{d-i}$

1) è identicamente nulla $\Leftrightarrow g_0 = g_1 = \dots = g_d = 0$
 è soluzione $\Leftrightarrow A$ è punto di appartenenza
 a $\tilde{V}(F) \Rightarrow \alpha \in \tilde{V}(F)$.

$$[g_0 = g_1 = \dots = g_d = 0]$$

2) non è identicamente nulla $\Rightarrow$

$G(\alpha, \beta)$ è omogeneo di grado d .

$$\text{Se } g_0 \neq 0 \Rightarrow G(\alpha, \beta) = g_0 \beta^d + \alpha (\dots)$$

In particolare $[(\alpha, \beta)] = [(0, 1)]$ non può essere
 soluzione di $G(\alpha, \beta) = 0$ perché
 $G(0, 1) = g_0 \neq 0$.

e 2 soluzioni distinte di $G(\alpha, \beta) = 0$
 non prop. (= punti distinti) corrispondono
 punti distinti di $F(x, x_2, x_3) = 0$ in $\mathbb{P}^2$.

→ **ABBIAIMO** $|\mathbb{P}^2 \cap \tilde{V}(F)| = d$.

Supponiamo ora $g_0 = 0, \dots, g_{k-1} = 0$

$$g_0 = g_1 = \dots = g_k = 0 \quad \text{e} \quad g_{k+1} \neq 0$$

$$\Rightarrow G(\alpha, \beta) = g_{k+1} \alpha^{k+1} \beta^{d-k-1} + g_{k+2} \alpha^{k+2} \beta^{d-k-2} + \dots + g_d \alpha^d =$$

$$= \alpha^{k+1} \left(g_{k+1} \beta^{d-k-1} + \dots + \alpha g_d \right)$$

**polinomio omogeneo in (α, β)
 di grado $d-k-1$**

oss: $[(\alpha, \beta)] = [(0, 1)]$ è radice di $G(\alpha, \beta)$
(k+1) volte

D'altro canto posto $L(\alpha, \beta) = g_{k+1} \beta^{d-k-1} + \dots + g_d \alpha^{d-k-1}$

vediamo che $[L(\alpha, \beta)] = [0, 1]$ non può essere
radice di $L(\alpha, \beta)$ perché $g_{k+1} \neq 0$, inoltre
 $\deg L(\alpha, \beta) = d - k - 1$.

→ usando lo stesso ragionamento di prima

$$H(\xi) = L(1, \xi) \quad L(\alpha, \beta) = \beta^{d-k-1} H\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

ri vede che $L(\alpha, \beta)$ contribuisce con

$$d - k - 1$$

punti all'intersezione di $\tilde{V}(F)$ con π .

In quanto $H(\xi)$ è un polinomio in ξ di grado $d-k-1$.

$$\# \text{ totale punti} = (k+1) + (d-k-1) = d$$

$[(0,1)]$ punto che
contiene vengono
tutte le da $H(\xi)$

□

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow y = 1$$

$$\begin{cases} x_2 x_3 = x_1^2 \\ x_4 = x_3 \end{cases} \rightarrow$$

$$P = [(1, 0, 1)]$$

$$Q = [(0, 1, 0)]$$

$$\begin{cases} x_2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha \\ x_3 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta \\ x_4 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha \end{cases} \quad \text{da } \alpha \beta = \alpha^2$$

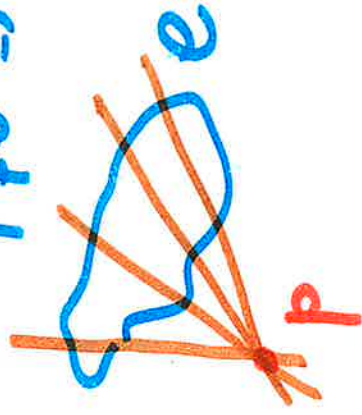
$$[(0, 1)]$$

$$G(\alpha, \beta) = \alpha \beta - \alpha^2 = \alpha(\beta - \alpha) \quad \swarrow \quad [(1, 1)]$$

CONSEGUENZE/DIM

1) $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ eq. curva algebrica

$$F \neq 0 \Rightarrow \exists P \in \mathbb{P}^2 \setminus \tilde{V}(F) \Rightarrow$$



ogni retta per P

interseca la curva

$$C = \tilde{V}(F) \text{ in almeno}$$

un punto $\neq P$

inoltre è impossibile

che 2 rette per P intersechino

C nel medesimo punto

$\Rightarrow$ ci sono in $\tilde{V}(F)$ almeno tanti punti quante

rette nel fascio per P $\Rightarrow \infty$ punti

$$d \cdot \infty^1 \approx \infty^1$$

$$y = \sin(x)$$

$$y = 1$$



non può essere
una curva algebrica!

$$2) \quad |\tilde{V}(F) \cap \tilde{V}(G)| \geq d+1 \Rightarrow h_0 \leq \tilde{V}(F).$$

Teorema di Bézout: Siano $F \in G$ due polinomi
omogenei di grado m ed n rispettivamente
in x_1, x_2, x_3 .

$$\Rightarrow |\tilde{V}(F) \cap \tilde{V}(G)| = m \cdot n$$

a meno che $\tilde{V}(F)$ e $\tilde{V}(G)$ non abbiano componenti
in comune.

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{y = h(x)} \text{ con } \deg h = \deg g.$$

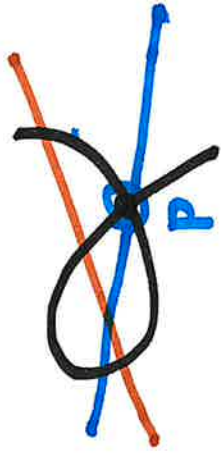
$$\Rightarrow f(x, h(x)) = 0$$

$$\deg f(x, h(x)) \leq \deg f \cdot \deg h = \deg f \cdot \deg g.$$

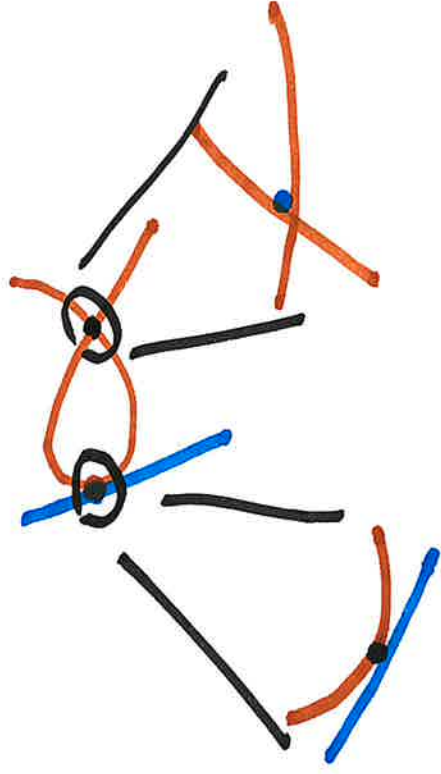
$\rightarrow$ mn soluzioni in $\mathbb{P}^2$

$$y^2 = (x^2 - 1)x$$



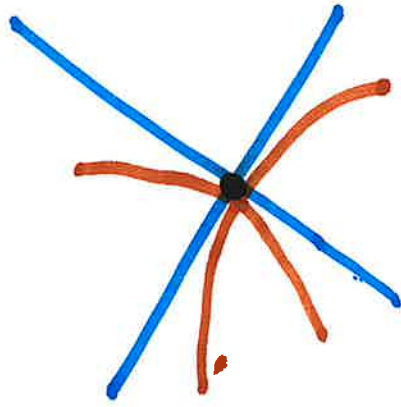
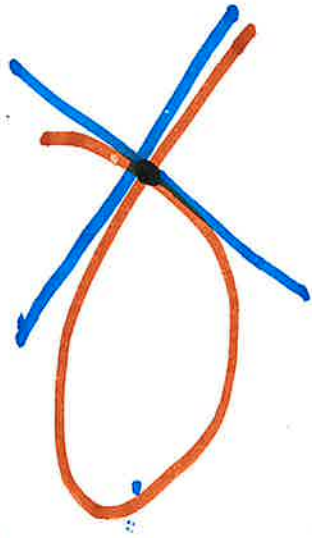


Q



Def: Sia $C = \tilde{V}(F)$ una curva algebrica.

Un punto $P \in C$ è detto multiplo (k -uplo) se ogni retta passante per P interseca C in P almeno k volte ed esistono k rette per P che intersecano C in P $(k+1)$ volte.



Def
Testes: Sia $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ un po eq. omogenea
 e sia $P \in \tilde{V}(F)$ un punto semplice (= non
 multiplo). Si sia tangente in P una retta
 per P che interseca $\tilde{V}(F)$ in P almeno 2 volte.

Se $C = \tilde{U}(F)$ e P è un punto $P \in C$
 $P = [x_1' \ x_2' \ x_3']$ allora la K_3 .

a C in P ha equazione

$$\nabla F|_P \cdot (x_1 \ x_2 \ x_3) = 0$$

ove $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)$

con $\frac{\partial F}{\partial x_i} =$ derivata formale parziale
di F rispetto x_i .

e



le curve

$P \in C$

consideriamo il
fascio di rette per P

e vogliamo che la coord. di

P riduca soluzione 2 volte dell'eq.

che dà l'inversione.

Ci si ricorda che se $f(x)=0$ è una eq. polinomiale

$\Rightarrow x_0$ è radice moltiplica di en $\Leftrightarrow x_0$ è radice

di $f(x)=0$ ed anche $f'(x)=0$.

Infatti x_0 radice moltiplica $\Rightarrow f(x)=(x-x_0)^2 g(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(x - x_0)g(x) + (x - x_0)^2 g'(x)$$

e quindi $f'(x_0) = 0$.

In particolare $P = [(x_1, x_2, x_3)]$ deve essere tale che si abbia una soluzione doppia.

oss: Un punto P è multiplo $\Leftrightarrow \nabla F|_P = 0$

In particolare in un punto multiplo la tg. non è definita.

→ si parla di tangenti principali in P per le rette che intersecano C in P $(k+1)$ volte.

$$P = [(x'_1 \ x'_2 \ x'_3)] \in \mathcal{C} \quad \mathcal{C} = \tilde{U}(F) \\ F(x_1 \ x_2 \ x_3) = 0$$

$$\text{Sia } Q = [(x''_1 \ x''_2 \ x''_3)] \in \mathbb{P}^2 \mathbb{C}$$

consideriamo la retta PQ

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x'_1 + \beta x''_1 \\ x_2 = \alpha x'_2 + \beta x''_2 \\ x_3 = \alpha x'_3 + \beta x''_3 \end{cases}$$

e sostituiamo in F

$$G(\alpha, \beta) = F(\alpha x'_1 + \beta x''_1 \ \alpha x'_2 + \beta x''_2 \ \alpha x'_3 + \beta x''_3).$$

OSSERVIAMO CHE $P \in \tilde{V}(F) \Rightarrow$

$\Rightarrow (1, 0)$ è soluzione di $G(\alpha, \beta) = 0$

$\Rightarrow G(\alpha, \beta) = \alpha [H(\alpha, \beta)]$

vogliamo trovare adesso $(x_1'' x_2'' x_3'')$

tale che $H(\alpha, \beta)$ annulla ancora

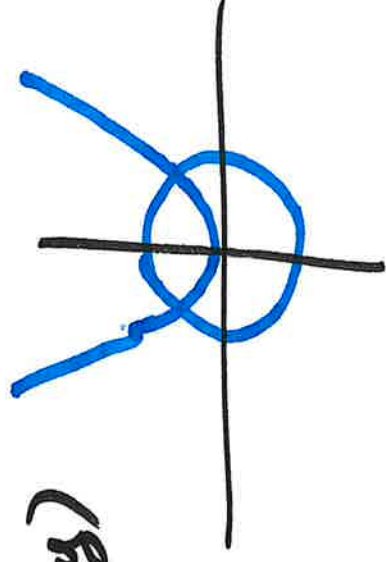
come soluzione $(1, 0)$. #

Def: Una curva algebrica $\tilde{V}(F)$ è detta riducibile

$\Leftrightarrow \exists G, H$ polinomi tali che $\tilde{V}(F) = \tilde{V}(G) \cup \tilde{V}(H)$.
ed in tale caso si dice che $\tilde{V}(F)$ è irriducibile in $\tilde{V}(G)$
unito $\tilde{V}(H)$.

Esempio $(x^2+y^2-1)(x^2-y) = f(x,y)$

$$(x^2+y^2-1)(x^2-y)=0$$



Teorema: Una curva algebrica $\tilde{V}(F)$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

è riducibile $\Leftrightarrow \exists G, H$ polinomi

omogenei tali che $\tilde{V}(F) = \tilde{V}(G) \cup \tilde{V}(H)$

e G divide F ed $H \mid F$
 $\hookrightarrow$ divide

In particolare $F = \alpha G^k \cdot H^l$ con $\alpha \neq 0$
 $k, l \in \mathbb{N}$

Teorema: Sia $\tilde{V}(F)$ una curva algebrica di grado d .

Allora $\tilde{V}(F)$ non ha punti $(d+1)$ -upli e

$\times \tilde{V}(F)$ ha un punto d -uplo $\Rightarrow \tilde{V}(F)$

è unione di d rette passanti per quel punto.

DIM: Se $P \in \tilde{V}(F)$ e P $(d+1)$ -uplo $\Rightarrow$ ogni retta per P interseca $\tilde{V}(F)$ almeno $(d+1)$ volte $\Rightarrow \Rightarrow$ è contenuta in $\tilde{V}(F) \Rightarrow \tilde{V}(F) = \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{A}^2$.

ALTRIMENTI: RAGIONAMO PER INDUZIONE

$[d=2]$



Sia $d=2$ e P doppio.

poiché in $\mathbb{P}^2$ una curva ha ∞ punti $\Rightarrow \exists Q$ tale che $Q \in \mathcal{B}$ e $Q \neq P$

$\Rightarrow$ La retta PQ interseca $\mathcal{C}$ almeno 3 volte
 $(z \text{ in } P \text{ ed in } Q) \Rightarrow r_0 = PQ \subseteq \mathcal{C}$
 $\Rightarrow$ posto $G(x_1, x_2, x_3) = 0$ equazione di r_0
 abbiamo $F(x_1, x_2, x_3) = G(x_1, x_2, x_3)H(x_1, x_2, x_3)$.

poiché $M \cdot \deg F = 2 \Rightarrow \deg H = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \tilde{V}(F) = \tilde{V}(G) \cup \tilde{V}(H)$ con
 $\tilde{V}(G)$ e $\tilde{V}(H)$ rette.

$\boxed{(d-1) \Rightarrow d}$ Sia P un punto d -uplo e $Q \in \mathcal{C}$ con
 $Q \neq P \Rightarrow PQ$ interseca $\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$ $d+1$
 volte $\Rightarrow PQ$ è contenuto in $\mathcal{C}$.

$\Rightarrow$ Sia $G(x_1, x_2, x_3) = 0$ eq. di $PQ \Rightarrow$

$$F(x_1, x_2, x_3) = G(x_1, x_2, x_3)H(x_1, x_2, x_3)$$

con $\deg G(x_1, x_2, x_3) = 1$

$\deg H(x_1, x_2, x_3) = d-1$.

Osserviamo che una retta per P interseca in

P $\tilde{V}(G)$ una volta $\Rightarrow$ interseca $\tilde{V}(H)$

$(d-1)$ volte $\Rightarrow P$ è punto $(d-1)$ -uplo per

$\tilde{V}(H)$ con $\deg H = d-1 \Rightarrow$ per ipotesi induttiva

$\tilde{V}(H)$ si spezza in $(d-1)$ -rette.

$\Rightarrow \tilde{V}(F)$ si spezza in $(d-1)+1 = d$ rette $\square$